

**ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LA RESPUESTA DE ESTRUCTURAS
AUXÉTICAS HEXAQUIRALES Y RE-ENTRANTES CON COEFICIENTE DE
POISSON NEGATIVO BAJO CARGA UNIAXIAL EN EL PLANO XY**



**DANIEL ALBERTO BARON CANGREJO
20141375014**

**PROFESOR GUIA:
CARLOS ARTURO BOHÓRQUEZ ÁVILA**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD TECNOLÓGICA
PROYECTO CURRICULAR DE INGENIERIA MECÁNICA
BOGOTÁ D.C.
2016**

Tabla de contenido

1. Planteamiento del Problema.....	2
2. Estado del Arte.....	3
3. Justificación.....	11
4. Objetivos	12
4.1 Objetivo General.....	12
4.2 Objetivos Específicos	12
5. Marco Teórico	13
5.1 Relación de Poisson.....	13
5.2 Historia del coeficiente de Poisson	14
5.3 Materiales Auxéticos	15
5.4 Categorización	15
6. Metodología	16
7. Presupuesto	17
8. Cronograma	17
9. Referencias	19

ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE LA RESPUESTA DE ESTRUCTURAS AUXÉTICAS HEXAQUIRALES Y RE-ENTRANTES CON COEFICIENTE DE POISSON NEGATIVO BAJO CARGA UNIAXIAL EN EL PLANO XY

1. Planteamiento del problema

El comportamiento elástico de los materiales comunes se caracteriza por una reducción en su sección transversal al ser sometidos a una carga de tracción y de manera opuesta experimentan una expansión en dicha sección transversal al ser aplicada una carga de compresión, al parámetro que mide estos cambios elásticos se le conoce como coeficiente de Poisson[1] (Ecuación 1), este parámetro está comprendido entre 0 y 0.5, siendo su valor alrededor de 0.3 para gran parte de materiales, como el acero[2]. Sin embargo, existen casos para materiales y modelos micromecánicos donde se evidencian valores de coeficiente de Poisson negativos.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \quad (1)$$

Es aquí donde el concepto de coeficiente de Poisson negativo está estrechamente relacionado a los materiales auxéticos, ya que este término es el que define el comportamiento de dichos materiales o modelos. La primera persona en sugerir que el coeficiente de Poisson podría ser negativo fue el físico matemático Saint-Venant [3], con su trabajo publicado en 1848 sobre el comportamiento mecánico de diferentes materiales estructurales. Años más tarde, en 1965, Fung YC. Basado en la teoría matemática de la elasticidad y las restricciones termodinámicas impuestas a los sólidos elásticos, propondría unos límites para el coeficiente de Poisson de $-1 < \nu < 0.5$ en sólidos isotrópicos [4]. Debido a estas declaraciones, en la década de los 80s el interés investigativo en los materiales con valores de coeficiente de Poisson negativo creció de manera importante llegando a crear experimentos de medición y análisis computacional para determinar estas características en diferentes materiales.

El término "Auxético" fue usado por primera vez en 1991 por el físico e ingeniero Ken E. Evans, en su trabajo sobre materiales poliméricos con coeficiente de Poisson negativo, introduciendo este tipo de características como una nueva gama de materiales en el mundo [5]. Con el término Auxético acunado por cada vez más investigadores interesados en el ámbito de los nuevos materiales, la década de los años 90s y los primeros años de la década del 2010 fueron años encaminados a determinar temas como: qué sólidos en la naturaleza¹ presentan características auxéticas y de qué tipo, también se descubrieron diferentes tipos de microestructuras auxéticas, las cuales demostraron tener valores cercanos a -1 (dependiendo del tipo de microestructura) de coeficiente de Poisson y por

¹ En estudios importantes se determinaron características auxéticas en sólidos con estructuras cristalinas y en espumas de compuesto polimérico, (Liu P V. and Griffin A. C. 1998-2005) (Alderson K. L. 2007)

último se propusieron posibles aplicaciones tanto en la industria a gran escala, como en usos del diario vivir de cada persona.

Diferentes autores representativos como Alderson[6], Gibson[7] o Wojciechowski[8] han enfocado sus investigaciones en clasificar, analizar e interpretar, diferentes tipos de microestructuras auxéticas llegando a sugerir un grupo de estas formaciones como las más óptimas para el desarrollo de posibles aplicaciones industriales, sin embargo, el tema de sólidos auxéticos y aún más, las microestructuras auxéticas representan un gran esfuerzo en cuanto a su análisis y fabricación, ya que para estos dos apartados, estos nuevos materiales ofrecen una gran complejidad.

Es aquí en donde se enfoca la finalidad de esta investigación, ya que se propone una orientación analítica en lo concerniente al comportamiento de determinadas microestructuras auxéticas por medio de un estudio computacional de elementos finitos, esto debido a que estos tipos de estructuras poseen un gran campo de acción, pues independientemente del tipo de material en que estén compuestas, su compleja estructura ofrece valores negativos en su coeficiente de Poisson al ser sometidas a diferentes tipos esfuerzos; eso sin mencionar, que las posibles combinaciones entre varios tipos de configuraciones sugiere un alcance mayor en cuanto a sus propiedades mecánicas.

Por medio de una metodología estructurada donde se realice la caracterización, simulación y análisis en cuanto al comportamiento de varios tipos de microestructuras bajo criterios de evaluación similares, se busca determinar las configuraciones geométricas más óptimas para cada microestructura, así como la comprobación de sus principales propiedades mecánicas y posibles aplicaciones en vigas sencillas.

2. Estado del arte

El reciente interés y desarrollo investigativo que se ha venido dando en los últimos años en lo respectivo a materiales y microestructuras auxéticas, se presenta como una base para la creación de técnicas de implementación de estos nuevos materiales de comportamiento no convencional que prevén un nuevo futuro en cuanto a la ingeniería de materiales; Tal es el caso del Docente e ingeniero Yunan Prawoto el cual, en su trabajo titulado: ***“Materiales auxéticos desde un punto de vista mecánico: un repaso estructural en el coeficiente de Poisson negativo”***[9], expone los principales efectos producidos por un coeficiente negativo en las propiedades mecánicas de materiales sólidos, argumentando que la mayoría de los materiales en la ingeniería poseen un alto módulo de rigidez (G) en comparación con su módulo volumétrico (K), sin embargo, al cambiar la microestructura del material a tal forma que su coeficiente de Poisson (ν) es cada vez más bajo, los valores de K y G pueden ser alterados si el módulo de elasticidad (E) permanece constante, es decir, el decrecimiento de ν a valores por debajo de cero resultan en un alto valor en el módulo G en relación con su módulo K.

En otra instancia, Prawoto aclara que los materiales Auxéticos se encuentran presentes en la naturaleza, dando como ejemplos el mineral conocido como cristobalita (SiO_2), el grafito pirolítico y algunos tipos de zeolitas (silicatos de zeolita); estos cristales poseen una compleja microestructura donde se evidencian altos niveles de resistencia al esfuerzo

cortante pero carecen de resistencia en cuanto a la deformación volumétrica, por lo tanto, su módulo de rigidez (G) es mucho mayor que su módulo volumétrico (K).

En un enfoque más avanzado, Prawoto realiza un análisis y clasificación de los tipos de configuraciones Auxéticas más comunes, basándose en su microestructura y morfología; como primer punto de referencia se encuentra la **estructura tipo Re-entrante**, la cual se conforma de un polígono donde sus ángulos internos son negativos (Fig. 1), teóricamente, las fibras diagonales se alinean en la dirección horizontal cuando la estructura sufre un esfuerzo de compresión y en caso contrario, al momento de sufrir un esfuerzo de tensión las fibras se mueven logrando una posición vertical.

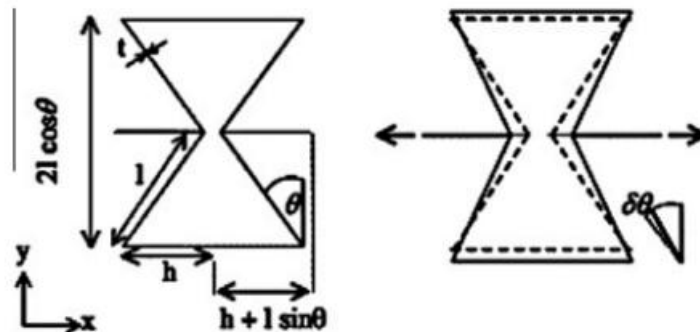


Figura 1. Unidad básica de celda hexagonal de geometría Re-entrante [9].

Con base en el modelo de panal de abeja, el autor propone un análisis topológico básico de dicha microestructura, poniendo como variables de entrada la geometría de cada célula unitaria y sus correspondientes características mecánicas como módulo de rigidez, módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson; en los resultados se explica que este tipo de estructuras tienen un valor de coeficiente de Poisson en función del ángulo invertido de las fibras de las celdas, de esta manera, el módulo de elasticidad en la estructura panal decrece con un incremento de dicho ángulo invertido.

Otro tipo de microestructura que Prawoto explica es la **configuración Quiral**, donde dice que esta clase de microestructura es la más estudiada a nivel matemático y computacional. El coeficiente de Poisson en configuraciones quirales en cuanto a deformaciones en plano puede ser redondeada en valores cercanos a -1.

Al igual que con la microestructura analizada anteriormente, Prawoto realiza estudios analíticos y experimentales sobre su geometría y comportamiento bajo cargas y esfuerzos, llegando a evaluar tres sub-estructuras derivadas de la quiral, las cuales son hexaquiral, rotaquiral y tetraquiral. En la microestructura hexaquiral se encontró que posee un alto módulo de elasticidad en el plano y un coeficiente de Poisson cercano a -1, en cuanto a los ligamentos circulares de la configuración rotaquiral, estos pueden adquirir parámetros que modifican la microestructura logrando propiedades específicas de absorción. Para la tetraquiral se evidenció una mayor rigidez en la dirección principal de las celdas. Para todos estos tipos de microestructuras, los efectos auxéticos en el plano están restringidos para intervalos cortos en todas sus direcciones.

Posterior a esto, el autor realiza una reseña de lo que ha sido el enfoque experimental en este tipo de materiales durante los últimos años, resaltando como principal actividad la caracterización y aplicación funcional basándose en las propiedades mecánicas de cada tipo de microestructura. Por último, Prawoto argumenta que los materiales auxéticos tienen un gran potencial para aplicaciones en el campo bio-mecánico, automotriz y de mecanismos de defensa, también acota el potencial uso que se le puede dar a estos materiales para crear nuevos tipos de estructuras con nuevas funciones, sin embargo, se hace necesario más trabajo de investigación encaminado a entender este tipo de material y sus aplicaciones en componentes reales; desde el punto de vista mecánico y computacional del análisis, las investigaciones se enfocarán en la celda unitaria de cada configuración, llegando a predecir el comportamiento macro de cada estructura en estudio.

Continuando con el análisis de materiales auxéticos, se llega a la investigación realizada por los ingenieros Sergio Ribeiro F, Thais A. Silva y Luciano Gomes V, en su artículo llamado: ***“Efectos Geométricos en estructuras auxéticas sustentables integrando optimización por enjambre de partículas y método de elementos finitos”***[10], donde se clasifican a los materiales auxéticos como meta-materiales, es decir, materiales hechos por la mano del hombre e imbuidos con propiedades que no existen en la naturaleza, dichos materiales se caracterizan por tener una alta resistencia a la indentación, mejores características acústicas que otros elementos comunes y de acuerdo a la teoría de la elasticidad, el módulo de rigidez en estructuras auxéticas podría ser incluso más grande que su módulo volumétrico, haciendo de estas estructuras una idea sustentable para muchas aplicaciones, especialmente en el campo aeroespacial.

El argumento de la investigación comienza con la introducción a la producción de llantas en Brasil y el impacto negativo que este producto crea en el medio ambiente por los desechos de llantas en mal estado o averiadas; en una escala global, entre 700 millones y 1 billón de nuevas llantas son manufacturadas cada año y se estima que estos valores incrementarán debido al aumento en los índices de población y del uso del automóvil como medio de transporte.

El uso de desechos de caucho como un elemento adicional en la composición de nuevos materiales se ha convertido en el enfoque de muchas investigaciones, esto debido a que estas partículas exhiben una excelente flexibilidad, ductilidad y absorción al impacto en comparación con materiales comunes. Dejando de lado el tema ambiental, elastómeros como el caucho ofrecen propiedades singulares como: baja densidad, aislante eléctrico, alta resistencia química, alta tenacidad y gran absorción a la vibración, haciendo de estos una fase potencial para la creación de estructuras poliméricas auxéticas. Los autores del artículo proponen usar un método basado en la integración de análisis por elementos finitos (FEA) y la optimización por medio de un algoritmo evolucionado (GA). La adición de desechos de caucho en compuestos poliméricos se muestra como una opción viable, con un moderado incremento de esfuerzo interno se logra un buen comportamiento en la relación resistencia a la tenacidad/peso.

Con el fin de realizar un estudio aplicado a los materiales auxéticos se determina implementar el tipo de **estructura Re-entrante** en configuración de panel, para determinar el comportamiento del compuesto polimérico a base de caucho. Se sugiere implementar una metodología combinada de respuesta superficial, análisis de elementos finitos (FEA) y

optimización por enjambre de partículas (PSO), con el fin hacer posible la caracterización del comportamiento mecánico de diferentes estructuras con coeficiente de Poisson negativo vía análisis experimental y simulación numérica.

Para el análisis experimental se fabrica un prototipo de estructura polimérica compuesta de dos fases, la primera es una matriz epóxica y la segunda un aglomerado de desechos de caucho. Las propiedades elásticas del compuesto fueron comprobadas en una prueba de tensión-compresión con una carga unitaria de 10 KN y un extensómetro de no contacto, la prueba de velocidad se estableció en 4 mm/min para configuraciones auxéticas, las condiciones para el estudio experimental se establecieron para los siguientes factores: ancho interno de 10 y 20 mm, espesor de pared de 2 a 4 mm y el ángulo interno de celda de -10° a -20° , basándose en los resultados obtenidos, se procede a calcular el coeficiente de Poisson con la ecuación (1).

El método de superficie de respuesta es un técnica empírica usada para múltiples análisis de regresión teniendo en cuenta datos cuantitativos, este análisis trabaja en función de datos en continuo ajuste dependiendo de la superficie de estudio; la respuesta es modelada por una función lineal que depende de diferentes variables previamente establecidas y que se relacionan entre sí, los posibles valores-resultado son obtenidos por medio de series de Taylor. Una ecuación cuadrática polinomial fue usada para relacionar cada respuesta en las diferentes variables basándose en el método de superficie de respuesta.

El método FEA es usado para evaluar el efecto del proceso empírico en las propiedades elásticas por medio de análisis computacional, en cuanto a los valores del coeficiente de Poisson, tanto en el proceso experimental como en el numérico, guardan una buena correlación de resultados. De esta manera, con el FEA se logra determinar el comportamiento mecánico de estructuras **Re-entrantes** diseñadas bajo diferentes factores geométricos, como lo son ancho interno (de 30 a 40 mm), espesor de pared (6 mm), ángulo interno en la celda unitaria (de -1° a -30°), siendo posible ampliar los límites experimentales en diferentes condiciones. En la siguiente tabla se muestra la comparación entre resultados obtenidos experimentalmente y por el método PSO.

Width	Thickness	Angle	Experimental values			PSO Values		
			Modulus of elasticity (MPa)	Ultimate Strength (MPa)	Poisson's ratio	Modulus of elasticity (Mpa)	Ultimate Strength (MPa)	Poisson's ratio
10	2	-10	217.5	1.97	-0.86	227.8611	1.8225	-0.9175
10	2	-20	198.6	2.42	-1.56	188.2382	2.5675	-1.5025
20	4	-10	338.1	4.09	-0.06	348.4592	3.9425	-0.0775
20	4	-20	443.1	2.89	-0.01	432.7364	3.0375	-0.0125
10	4	-10	46.3	0.56	-0.12	35.9367	0.7075	-0.1525
10	4	-20	40.407	0.54	-0.44	50.7674	0.3925	-0.4975
20	2	-10	213.4	2.40	0.06	203.0376	2.5475	0.0075
20	2	-20	222.5	2.85	-0.13	232.8612	2.7025	-0.1675

Tabla 1. Comparación de resultados experimentales y de simulación en la estructura auxética [10].

El PSO se demuestra como un eficiente y robusto algoritmo de optimización para estructuras auxéticas, los datos experimentales y numéricos en cuanto al coeficiente de Poisson y las propiedades mecánicas del compuesto, mostraron una gran correlación y

cercanía. Los resultados revelaron que un incremento en el ángulo interno hace decrecer el valor del coeficiente de Poisson y resistencia última a la tensión en la microestructura. La optimización por enjambre demostró que el módulo de elasticidad incrementa cuando el ángulo interno de la celda decrece.

Al ubicar esta evolución sobre materiales auxéticos, se pone en contexto una de las pocas investigaciones realizadas en Colombia llamada “**Estructuras hexaquirales con coeficiente de Poisson negativo bajo carga uniaxial en el plano**” [11], desarrollada por ingenieros mecánicos de la universidad del valle en Colombia, la cual introduce el estudio de estructuras celulares hexaquirales en forma de panal a la aplicación de paneles tipo sándwich para usos en el ámbito automotriz y aeroespacial. Este tipo de microestructuras quirales reciben su nombre porque se componen de celdas con seis ligamentos unidos tangencialmente a un nodo principal; Utilizando la teoría de los materiales celulares, la cual permite el cálculo de propiedades mecánicas en microestructuras asumiendo ligamentos como vigas, se determina que las estructuras hexaquirales poseen un comportamiento isotrópico en el plano X-Y, es decir, que los coeficientes de Poisson en las direcciones X y Y así como los módulos de elasticidad en el plano son iguales respectivamente.

Teóricamente este tipo de estructuras quirales poseen un coeficiente de Poisson cercano a -1, donde los módulos de elasticidad efectivos dependen del módulo de elasticidad del material (E_s) y de algunos parámetros geométricos como lo son: espesor de pared (t), longitud de ligamento (L) y radio de los nodos (r). Todas las propiedades mecánicas se evaluaron asumiendo redes infinitas en las que todos los nodos son rígidos y tienen seis ligamentos atados tangencialmente, sin embargo, los autores de esta investigación hacen la acotación de que en las aplicaciones reales las están limitadas geoméricamente debido a la configuración de uso, esto implica que se tiene un número finito de celdas unitarias y por lo tanto no todos los nodos cumplen con la condición hexaquiral.

Es importante aclarar que desde el inicio de la investigación se resalta el desconocimiento de las condiciones dimensionales que garantizan la rigidez de los nodos con respecto a los ligamentos, es por esta razón, que el objetivo principal del estudio es predecir mediante el método de elementos finitos, la influencia del número de celdas unitarias sobre las propiedades mecánicas de las estructuras hexaquirales, además del efecto del espesor de los nodos con respecto al de los ligamentos y la relación de aspecto entre ellos.

En la metodología usada para el desarrollo del argumento, se usaron configuraciones hexaquirales donde se varió la cantidad de celdas unitarias, la relación entre el espesor de los nodos con respecto al de los ligamentos t_n/t y la relación de longitud entre estos mismos L/R , Para todas las diferentes configuraciones de celdas unitarias se garantiza que al menos un nodo cumpla con la condición hexaquiral y se delimita la mayor cantidad de celdas unitarias para que de esta manera se pueda trabajar en los resultados sin un alto recurso computacional. El estudio de las estructuras se realizó con **Aluminio 6061-T051**, por su amplia utilización en el campo aeroespacial y automotriz, el espesor evaluado para los ligamentos fue de 2 mm y el espesor fuera del plano de las estructuras fue de 25 mm.

Para modelar las diferentes configuraciones hexaquirales ante un estado de carga uniaxial se utilizó el programa **ABAQUS 6.9-1**, dichos modelos se realizaron asumiendo el material como elástico lineal y usando elementos planos estructurales tipo *Conventional Shell S4R*,

estos elementos tienen cuatro nodos y seis grados de libertad por nodo, por último las mallas fueron estructuradas con elementos cuadriláteros.

Otro punto importante en esta investigación es que los nodos y los ligamentos fueron modelados como un solo cuerpo asumiendo un empalme continuo, en aplicaciones reales esto podría generar diferencias ya que en la construcción de este tipo de estructuras se requiere algún tipo de ensamble entre los nodos y los ligamentos, por la dificultad de ensamblarlas como un solo sólido. Las diferentes configuraciones fueron sometidas a un estado de carga estática de tensión y compresión en el plano dentro del rango elástico lineal del material, se restringieron los desplazamientos en la estructura en dirección z y las rotaciones en las direcciones x y y . Para evitar la deformación de los nodos al momento de aplicar la carga, se rigidizan modelando cilindros de acero SAE 1045 con un espesor de pared de 2,5 mm.

En cuanto a los resultados, los modelos numéricos mostraron que los módulos de elasticidad efectivos de las estructuras tienden a ser iguales en ambas direcciones cuando el número de celdas unitarias es grande, sin embargo, no se presentan los mismos resultados cuando el número de celdas unitarias es pequeño, es aquí donde se evidencia una disparidad en investigaciones anteriores [12] las cuales indican que la totalidad de los nodos en la red cumplen con esta condición, independientemente de la cantidad de celdas que la componen. Los modelos numéricos confirmaron que las estructuras hexaquirales tienen un coeficiente de Poisson efectivo negativo. Sin embargo, se encontró que el comportamiento de estos coeficientes es anisotrópico en el plano al ser los U_{yx} mayores que los U_{xy} , lo que difiere de lo planteado en estudios anteriores [12], quienes determinaron que la respuesta de estos coeficientes en las estructuras es isotrópica. Este comportamiento puede ser causado por la cantidad de ligamentos atados a nodos externos.

Finalmente, los autores indican que para aplicaciones reales donde no todos los nodos satisfacen la condición hexaquiral y no todos los ligamentos están atados a nodos en sus extremos, la caracterización mecánica de las estructuras realizada en el presente trabajo sugiere un mejor control de sus parámetros geométricos, facilitando un diseño más flexible y confiable según el tipo de aplicación deseada.

Ahora que se ha expuesto la correspondiente explicación sobre las principales características y microestructuras desarrolladas para la teoría de los materiales auxéticos, se procede a analizar diferentes aplicaciones enfocadas en el uso de este nuevo tipo de materiales; uno de los campos en los cuales los materiales auxéticos presentan un gran potencial es en el área de la biomedicina, con investigaciones como la de O. Abdelaal y S. Darwish llamada: ***“Análisis, Fabricación y una Aplicación Biomédica de Estructuras Celulares Auxéticas”*** [13], donde el principal objetivo de los autores es evaluar la posible aplicación de una estructura auxética en el campo biomecánico, teniendo en cuenta variables como densidad relativa, propiedades mecánicas, variables geométricas y complejidad en fabricación.

La investigación empieza con la evaluación del comportamiento en la rigidez efectiva y el esfuerzo a la tensión en estructuras hexagonales de geometría convencional y estructuras auxéticas de tipo **Re-entrante**, a diferentes niveles de porosidad relativa. Se realizó un

análisis del sistema hexagonal bajo cargas de compresión y después se procede a realizar lo mismo con la configuración **Re-entrante** pero bajo cargas de tensión, por último se plantea el desarrollo de un modelo combinado de los dos tipos de estructuras para una viga en voladizo. En el modelamiento de las estructuras se determinó un primer modelo de sistema hexagonal con ligamentos inclinados a -60° con respecto a la vertical, en cuanto a la configuración auxética se creó con ligamentos inclinados a 60° con respecto a la vertical, para el modelamiento geométrico se utilizó el software SolidWorks².

Para ambos modelos, el ancho fuera de plano es de 21,5 mm y el tamaño de las celdas unitarias se estableció en 2,5 mm, la densidad relativa de las estructuras simuladas fueron calculadas basadas en los cambios en el espesor del ligamento de la estructura (Ecuación 2). En resumen la porosidad incrementa cuando el ancho del ligamento decrece, esto quiere decir, que para un mismo espesor de ligamento en cada celda unitaria, la configuración hexagonal convencional posee una mayor varianza en la porosidad con respecto a su contraparte auxética.

$$Porosidad = \frac{V_{Volumetrico} - V_{Celular}}{V_{Volumetrico}} \times 100\% \quad (2)$$

Los modelos de las dos propuestas y un tercero con la combinación de ambos para una viga en voladizo es exportada al software de análisis de elementos finitos ANSYS³, la aleación de Titanio Ti-6Al-4V es ampliamente usada como material biocompatible en aplicaciones biomédicas, sin mencionar que puede ser fabricado en procesos de manufactura aditiva, es por esta razón que la simulación se realiza con base en este material, por último se acota que para el análisis de elementos finitos se usa de una malla de alta calidad, la cual consiste en un elemento tetraédrico de 10 nodos (SOLID187).

Para el modelo convencional hexagonal y el modelo Re-entrante, la superficie inferior de cada estructura fue completamente fijada o anclada, sin embargo, en la hexagonal convencional se aplica una fuerza de compresión correspondiente al 2% del límite de fluencia, de la misma manera se realizó para la configuración Re-entrante pero aplicando una fuerza de tensión. Para calcular la rigidez efectiva en cada estructura se utilizó la Ecuación 3 y para el cálculo del coeficiente de Poisson se usó la Ecuación 1. Las deformaciones y resultados en propiedades mecánicas se muestran en el análisis por colores realizado en ANSYS.

$$E_{xx} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_{xy}} \quad (3)$$

En cuanto a la evaluación del comportamiento para los modelos combinados para viga en voladizo, el área del lado convexo de la viga se compone de celdas Re-entrantes y el área del lado cóncavo de la viga se compone de celdas hexagonales convencionales, esta estructura híbrida es simulada como viga en voladizo sometida a flexión, con una densidad

² Dassault, Systems SolidWorks Corp. Versión 2012

³ ANSYS, Academic Research, Versión 14.0

relativa del 85%, en un extremo de la viga se aplica una fuerza cortante de 1000N y en el otro se empotra a la pared, en la figura 2 se observan los resultados obtenidos para la estructura combinada tipo viga.

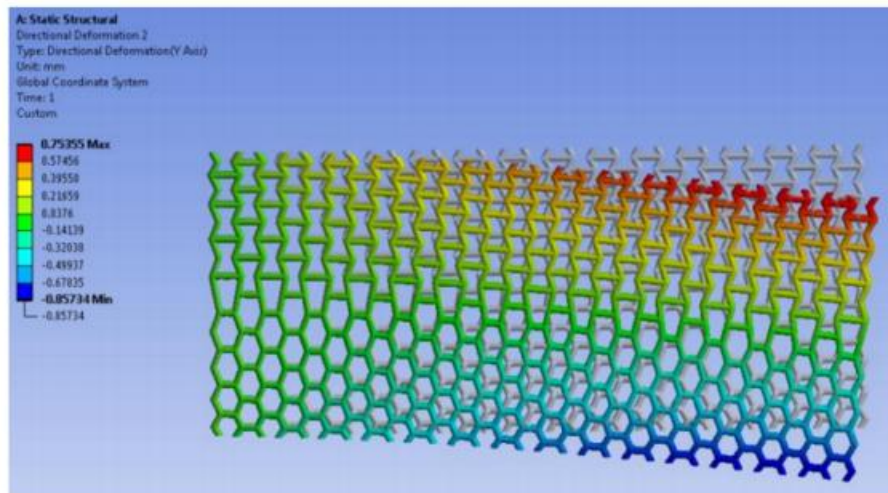


Figura 2. Deformación presente en viga en voladizo compuesta de estructura híbrida.

En cuanto a la fabricación de estructuras complejas como las auxéticas, se presenta un grado de dificultad alto usando técnicas tradicionales, es por esta razón que los autores de esta investigación proponen el método de manufactura aditiva, con técnicas avanzadas de computación, a bajo costo y de manera rápida, se logra obtener complejas configuraciones a base de materiales poliméricos, este método consiste en la aplicación de varias capas de espesores hasta de 50 micrómetros hasta obtener la figura deseada.

Finalmente, esta investigación propone la exploración en el campo de implantes biomédicos con aplicaciones para componentes femorales o de reemplazo completo de cadera, esto debido a que el esfuerzo en el hueso del fémur se reduce con la presencia de implantes auxéticos, logrando una mayor absorción de impactos en el hueso, es aquí donde el uso de técnicas avanzadas y el estudio en el comportamiento de estructuras y nuevos materiales con ayuda de modelos computacionales, estimula el desarrollo de interconectividad entre los huesos, mejoran el desempeño motriz de cada individuo y reduce índices de osteo-degeneración.

En otra investigación sobre los posibles aplicativos de materiales auxéticos se encuentra un estudio desarrollado por K. Alderson y M Sanami. con el nombre de **“Materiales Auxéticos para Aplicaciones en Deportes”** [14], donde se enfocan en el potencial que tienen las configuraciones de panal y las espumas auxéticas en los implementos deportivos, las celdas panal con cabeza de lanza están poseen una gran flexibilidad y gran articulación en sus ligamentos caracterizándose como una microestructura con coeficiente de Poisson negativo. En las estructuras panal quirales, los efectos auxéticos se acentúan sobre los cilindros de rotación, creando un momento flector sobre los ligamentos de unión o riostras, los cilindros o nodos, ofrecen un alto desempeño en esfuerzos de compresión y los ligamentos son de gran ayuda en los esfuerzos cortantes a los que se somete la estructura.

En sistemas quirales como los cabeza de lanza, la relación entre la carga aplicada y el coeficiente de Poisson, se presenta como una consecuencia en la cancelación de la rotación de los diferentes cilindro-nodo que componen la celda unitaria, esto debido a que la rotación del cilindro producida por un esfuerzo de tensión en la cima de la superficie, se opone a la rotación del cilindro en el fondo de la superficie afectado por un esfuerzo de compresión; para simular el comportamiento de este tipo de estructura se utilizó el modelo de elementos finitos con ayuda del software ANSYS⁴, donde el elemento PLANE2 se usó para la simulación de propiedades mecánicas en el plano, al momento de tener los modelos tridimensionales se usó el elemento SHELL 93.

La fabricación de espumas auxéticas por medio de procesos termo-mecánicos, es un procedimiento que se expone en trabajos anteriores[1], de esta manera los autores se enfocan en realizar una prueba de indentación con la espuma pre-fabricada para determinar posibles mejoras en propiedades mecánicas con la integración de configuraciones auxéticas; para espumas con coeficiente de Poisson negativo, los resultados mostraron un incremento en el módulo de elasticidad y un comportamiento lineal en cuanto a su rigidez, por lo tanto, la espuma auxética demuestra tener una mayor resiliencia bajo carga uniaxial de compresión, al igual que en otros trabajos expuestos, el coeficiente de Poisson sobre la espuma fue calculado mediante la Ecuación 1.

A través de las diferentes simulaciones realizadas en elementos finitos, los autores reportan que esta nueva configuración quiral en forma de lanza muestra un comportamiento auxético en el plano y fuera de este; gracias a la curvatura sinclástica que adopta esta estructura panal hace de este sistema un gran candidato como material base en muchas prendas deportivas, el material naturalmente adopta una doble curvatura, tal y como lo requieren los cascos, por lo tanto, los ligamentos y los nodos siempre harán que la superficie de contacto esté alienada al vector normal de la fuerza de impacto logrando la máxima resistencia a través de la estructura.

Como resultado de las diferentes pruebas realizadas a las espumas auxéticas pre-fabricadas, se resuelve que dichas espumas poseen una mayor resistencia a la indentación que las espumas convencionales, de esta manera se comprueba la gran capacidad de absorción de energía en este tipo de microestructuras, es por esta razón, que la espuma auxética se presenta como un excelente candidato a ser usado como material para elementos deportivos.

3. Justificación

El creciente desarrollo que el tema de los materiales auxéticos ha tenido en los últimos años ha sido importante, llegando a reconocer bastantes tipos de microestructuras, al igual que un gran número de facetas en las que se presenta este fenómeno, sin embargo, los principales esfuerzos se han enfocado en ampliar el espectro de propiedades de materiales auxéticos, sus posibles nuevas vertientes y la caracterización de estructuras ya analizadas previamente, llegando a crear una brecha entre la teoría y lo aplicado; esto se observa en investigaciones como las de Prawoto [9] o Gibson [7] los cuales exponen casos analíticos

⁴ ANSYS FE, package, Version 10.0

de alta importancia para entender el comportamiento de las principales configuraciones auxéticas, pero dejan de lado la interrogante de cómo se ve esto aplicado en casos puntuales a nivel industrial.

Por otro lado, se hace necesario reforzar las áreas importantes de la teoría auxética, pues con esto se logra llegar a ideas más aterrizadas y sólidas sobre este tipo de materiales, es decir, áreas como los modelos micromecánicos auxéticos o las vibraciones en sólidos auxéticos son un campo de investigación que promete mucho en el ámbito aplicativo y aunque autores como Wojciechowski[8], Luciano M [10] y Oscar G[11], han contribuido a este campo, es vital darle profundidad y continuidad a las investigaciones propuestas por esta serie de autores, pues con ello se logra aumentar el desarrollo aplicativo del tema.

Es en este momento donde se introduce el objetivo de esta investigación, ya que se hace necesario realizar una delimitación rigurosa de las propiedades de cada configuración auxética, de esta manera, se logra profundizar en el concepto teórico de la estructura y también se logra llevar este análisis a un campo más práctico. En conclusión lo que se busca en el desarrollo de este documento es definir y ofrecer una posible solución a temas principales que son trabajados de manera parcial o nula en las investigaciones de otros autores, pero que sin embargo, a criterio de los mismo autores o criterio propio son de gran importancia para complementar trayectoria investigativa que ha tenido hasta el momento este nuevo tipo de materiales.

4. Objetivos

4.1 Objetivo General

- Analizar la respuesta de estructuras auxéticas Hexaquirales y Re-entrantes con coeficiente de Poisson negativo por medio del modelamiento de elementos finitos en Ansys sometidas a cargas uniaxiales.

4.2 Objetivos Específicos

- Realizar un análisis de propiedades mecánicas para estructuras Auxéticas Re-entrantes y Hexaquirales variando su geometría.
- Elaborar un marco comparativo de la respuesta de estructuras Auxéticas Re-entrantes y Hexaquirales tomando como factor cambiante el material base, para este caso en específico, aceros estructurales normalizados.
- Verificar y Demostrar por medio del método de análisis por elementos finitos el comportamiento isotrópico en el plano XY para estructuras Auxéticas Re-entrantes y Hexaquirales.

5. Marco Teórico

5.1 Relación de Poisson

La relación de Poisson hace referencia a la deformación que sufre un material sólido cuando está sometido a una fuerza axial, ya que no solamente se alarga sino que se contrae transversalmente. Por ejemplo, si una tira de hule se alarga, puede notarse que el ancho y el espesor de la tira disminuyen; de igual manera, una fuerza de compresión que actúa sobre un cuerpo provocan que este se contraiga en la dirección de la fuerza y se expanda en su sección transversal. Estos dos casos se pueden ver en la Figura 2, donde se ilustra una barra de radio r y longitud L .

“Cuando una carga P se aplica a una barra, esta cambia una cantidad δ y su radio una cantidad δ' , las deformaciones unitarias en la dirección axial o longitudinal y en la dirección radial o lateral, son:”⁵

$$\epsilon_{Long} = \frac{\delta}{L} \quad y \quad \epsilon_{Lat} = \frac{\delta'}{r} \quad (4) \quad (5)$$

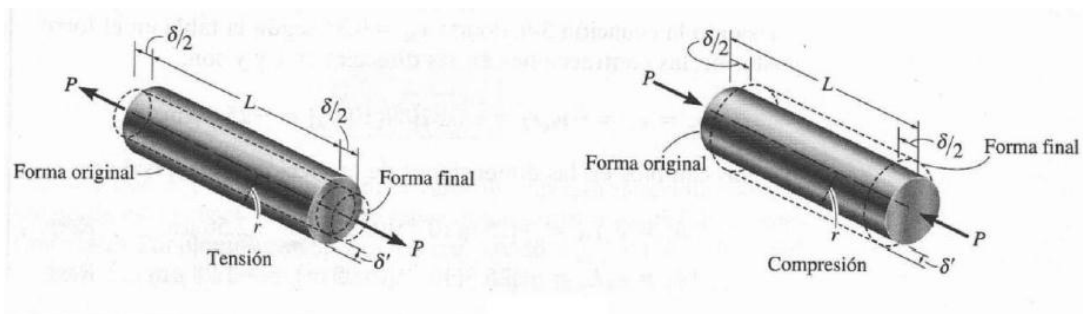


Figura 2. Representación gráfica de la relación de Poisson en barras de acero [15].

También se advierte que los esfuerzos normales de las caras perpendiculares a los ejes y y z son cero; en el mismo modo, es lógico concluir que las deformaciones correspondientes ϵ_y y ϵ_z son cero. En todos los materiales de ingeniería, la elongación que produce una fuerza axial de tensión \mathbf{P} en la dirección de la fuerza se acompaña de una contracción en cualquier dirección transversal. En este caso, se entra en la suposición de que todos los materiales son considerados homogéneos e isotrópicos, es decir, se supone que sus propiedades mecánicas son independientes tanto de la posición como de la dirección de la fuerza [16]. Esto significa que la deformación unitaria debe tener el mismo valor para cualquier dirección transversal, este valor se conoce como *deformación lateral*, llamada así en honor al matemático francés **Siméon Denis Poisson**, esta relación se denota con la letra griega ν y se define como:

$$\nu = - \frac{\epsilon_{trans}}{\epsilon_{long}} \quad (1)$$

El signo negativo se incluye ya que un alargamiento longitudinal ocasiona una contracción lateral y viceversa, es decir, el uso de un signo menos en la Ecuación 1, es para obtener un

⁵ R. C. Hibbeler. Op. Cit; Pág. 107.

valor positivo en la relación de deformaciones ν , las deformaciones axiales y laterales de todos los materiales de ingeniería tienen signos opuestos. Es importante advertir que esta deformación unitaria lateral es la misma en todas las direcciones radiales, además de que esta deformación unitaria es causada solo por fuerza axial o longitudinal, ninguna fuerza o esfuerzo actúa en una dirección lateral logrando deformar en esa dirección.

El coeficiente de Poisson es *adimensional* y para la mayoría de los sólidos no porosos, generalmente tiene un valor de entre 0.25 y 0.33. En particular, un material ideal sin movimiento lateral al sufrir elongaciones o contracciones, tendrá un valor de $\nu = 0$, por lo tanto $0 < \nu < 0,5$.

5.2 Historia del coeficiente de Poisson Negativo

A continuación se presenta un tabla en orden cronológico con los acontecimientos más importantes que han ocurrido a lo largo del descubrimiento y desarrollo investigativo del coeficiente de Poisson negativo y los materiales Auxéticos.

Year	Person	Discovery
1848	Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant	Suggested $\nu < 0$
1920	Woldemar Voigt	$\nu < 0$ in single crystals
1927	Augustus Edward Hough Love	$\nu < 0$ in pyrites
1946	R.F.S. Hearmon	$\nu < 0$ in single crystals
1965	Yuan-Cheng Fung	$-1 \leq \nu \leq 0.5$ for isotropic solids
1969	Poporeka and Balagurov	$\nu < 0$ in ferromagnetic films
1970	Landau and Lifshitz	Hint on $\nu < 0$
1971	Simmons and Wang	$\nu < 0$ in single crystals
1979	Bjeletich et al.	$\nu < 0$ in composite laminates
	Milstein and Huang	$\nu < 0$ in FCC crystals
1980	Tsai and Hahn	$\nu < 0$ in composite laminates
1981	Kittinger et al.	$\nu < 0$ in α -quartz
1982	Gibson et al.	$\nu < 0$ in re-entrant hexagonal honeycombs
1984	Carl T. Herakovich	$\nu < 0$ in composite laminates
1985	Robert F. Almgren	3D isotropic structures with $\nu = -1$
1987	Krzysztof Witold Wojciechowski	Hexagonal molecules ($\nu < 0$)
	Roderic S. Lakes	Foams ($\nu < 0$)
	Jaric and Mohanty versus Frenkel and Ladd	Debate on $\nu < 0$ in FCC
1988	Sun and Li	$\nu < 0$ in composite laminates
1989	Wojciechowski and Branka	Hexagonal molecules ($\nu < 0$)
	Evans and Caddock	Foams ($\nu < 0$)
1991	Kenneth E. Evans	Coined the term "auxetic"

Tabla 2. Breve cronología en el desarrollo investigativo de los materiales Auxéticos [1].

Un gran número de reseñas y evaluaciones han sido escritas en lo concerniente al tema de los materiales Auxéticos, se han creado series especializadas de talleres y conferencias

sobre este destacado tema y materiales con un comportamiento similar también han sido categorizados desde 2004.

5.3 Materiales Auxéticos

La definición de este parte de su etimología, ya que los materiales auxéticos son definidos como sólidos que poseen un coeficiente de Poisson negativo, cuando un material de este tipo es sometido a tensión en la dirección axial, este se expande en su sección transversal y de manera inversa, sucede una expansión en la sección transversal del material al ser comprimido. *“Este comportamiento se debe a la estructura de este tipo de materiales, que se puede comprender a partir de investigaciones sobre su modelo matemático ya que se representa en una serie de configuraciones conectadas, que se definen técnicamente como subunidades rotatorias rígidas. En el momento en que estas subunidades se giran con relación a las otras, el material disminuye su densidad mientras que incrementa su grosor”⁶.*

Habiendo definido el coeficiente de Poisson y la característica principal de los materiales auxéticos, se procede a definir los cinco puntos de referencia para sólidos isotrópicos. En la primera referencia se tiene como bien es conocido la preservación del volumen, también conocido como incompresibilidad $\nu = 0.5$. Cuando un sólido posee un valor de Poisson $\nu = 0$, la aplicación de carga axial no provoca ningún cambio en la sección transversal y dicha sección siempre se mantiene en dirección ortogonal con respecto a la dirección de la carga. Para sólidos isotrópicos, al tener un valor de coeficiente $\nu = -0.5$, se obtiene como resultado $E=G$. En el caso de las deformaciones en 2D el tope del valor de coeficiente de Poisson es 1.

Poisson's ratio	Physical significance
$\nu = 1$ (for 2D)	Preservation of area
$\nu = 0.5$	Preservation of volume
$\nu = 0$	Preservation of cross section
$\nu = -0.5$	Preservation of moduli, $E = G$
$\nu = -1$	Preservation of shape

Tabla 3.Cinco puntos de referencia del coeficiente de Poisson para sólidos isotrópicos [1].

5.4 Categorización

Las categorías de los materiales auxéticos con coeficiente de Poisson negativo son:

- Fibras usadas en “*composites*”. Estos son materiales sintéticos que se mezclan heterogéneamente formando un compuesto por moléculas de varios elementos, cuyos componentes pueden ser de refuerzo o de cohesión.
- Espumas polímeras como el teflón que en determinados tratamientos térmicos y mecánicos se comporta como un material auxético.

⁶ ¿Qué es auxético? Quees.la. consultado el día: 17 de marzo de 2016. Disponible en: <http://quees.la/auxetico/>

- Cristales como las zeolitas que manifiestan microscópicamente la propiedad auxética, Las zeolitas son minerales aluminosilicatos microporosos que tienen la particularidad de hidratarse y deshidratarse de forma reversible. En Biología se aplica este adjetivo al crecimiento de los organismos pluricelulares. De este modo, se llama crecimiento auxético al aumento de las células de un animal. Así el volumen del cuerpo del animal aumenta también debido al crecimiento de las células individuales sin que haya aumento del número de células individuales.

6. Metodología

En el inicio de este proyecto se realizará un estudio del estado del arte muy riguroso, de esta investigación se deben determinar temas importantes como los tipos de estructuras auxéticas, características generales, propiedades mecánicas, métodos de análisis y resultados tanto teóricos como experimentales, posterior a esto, se seleccionarán las configuraciones que se usarán en la investigación para desarrollar el análisis mecánico y su comportamiento, para ello se establecerán criterios de examinación como geometría de la estructura, dificultad en el modelamiento y parametrización en CAD, simulación y modelamiento en módulo APDL ansys, complejidad en el análisis teórico del sistema, método para ubicación de cargas y apoyos, así como versatilidad aplicativa de la estructura en el campo industrial.

Después de seleccionar las configuraciones auxéticas a trabajar se procede a crear el modelo de cada sistema de acuerdo a los parámetros definidos previamente, el primer estudio se enfocará en la geometría de las estructuras, por esta razón se realizará un modelo diferente de cada elemento cambiando valores en sus cotas principales, de este modelamiento se seleccionarán diferentes geometrías las cuales serán sometidas a cargas uniaxiales en el plano XY y YX, las deformaciones producidas expondrán el comportamiento de cada configuración, para este apartado se utilizará un acero como material base de las diferentes microestructuras. Es importante aclarar que adicional a esto, los sistemas auxéticos escogidos se elaborarán en paralelo en el programa de diseño CAD y en el módulo APDL de Ansys, de esta manera se busca establecer un punto de referencia en cuanto al margen de error creando una comparación de resultados entre las diferentes plataformas de diseño.

A continuación, se procede a realizar el análisis isotópico de cada estructura de acuerdo a los datos obtenidos previamente, los resultados en el plano XY y YX son graficados y dependiendo del grado de similitud en valores para cada plano de carga se determina la condición de isotropía para cada microestructura, además de esto, se ejecutará por medio de ANSYS APDL la simulación de configuraciones auxéticas en condiciones isotrópicas y anisotrópicas, con base en estos resultados y en estudios teóricos previos se complementará la conclusión de esta condición especial para estos sistemas. En este espacio se busca establecer la condición de igualdad declarada teóricamente para modelos auxéticos en estudios anteriores a este.

Luego de establecer los parámetros generales de cada estructura y tomando como base los resultados ya obtenidos, se procede a realizar un marco comparativo creando una simulación en Ansys APDL para diferentes tipos de microestructuras auxéticas

enfocándose principalmente en varios tipos de aceros estandarizados y comerciales, de este proceso se busca relacionar el tipo de acero del que está compuesta la configuración auxética con su geometría y tipo de estructura, ya que del análisis entre estas tres variables robustas se concluirá el direccionamiento de posibles aplicativos en el campo industrial. Por último, los resultados serán tabulados y analizados conforme a los objetivos a desarrollar en la investigación

7. Presupuesto

El análisis de presupuestal para este proyecto se realiza partiendo de la aplicación investigativa que tiene este documento, es por esta razón que no se contemplaran costos de fabricación ni de implementación. Se aclara que la ejecución del valor presupuestado en el desarrollo del proyecto se estima en 7 meses.

ITEM	UNIDAD	COSTO UNITARIO	CANTIDAD	COSTO TOTAL
COMPUTADOR PORTATIL	UND	\$2.200.000	1	\$ 2.200.000
MANO DE OBRA (INVESTIGACION Y DESARROLLO DEL INFORME)	HORA	\$ 5.000	840	\$ 4.200.000
TRANSPORTE	UND	\$ 2.000	52	\$ 104.000
PAPELERIA	UND	\$ 153.000	1	\$ 153.000
LIBROS Y TEXTOS ACADEMICOS	UND	\$ 55.000	3	\$ 165.000
ASESORIAS (DOCENTE GUIA)	HORA	\$ 20.000	28	\$ 560.000
			SUB TOTAL	\$ 7.382.000
			IMPREVISTOS 5%	\$ 369.100
			TOTAL	\$ 7.751.100

Tabla 4. Análisis básico presupuestal de proyecto

8. Cronograma

El cronograma establecido para el desarrollo de esta investigación se muestra a continuación, se estima un tiempo de siete meses para su culminación, sin embargo, esta programación está sujeta a cambios ya sea por imprevistos que se den a lo largo de la ejecución del proyecto o disponibilidad de los recursos para desarrollarlo.

		TIEMPO ESTIMADO DE DESARROLLO DEL PROYECTO																														
		SEMANAS																														
ACTIVIDAD	INICIO	FINAL	18-ene	25-ene	1-feb	8-feb	15-feb	22-feb	29-feb	7-mar	14-mar	21-mar	28-mar	4-abr	11-abr	18-abr	25-abr	2-may	9-may	16-may	23-may	30-may	6-jun	13-jun	20-jun	27-jun	4-jul	11-jul	18-jul	25-jul		
			Investigación y estudio del arte sobre la temática del proyecto	18-ene	7-mar																											
Selección de tipos de estructuras auxeticas y parametros a utilizar	7-mar	21-mar																														
Modelamiento de estructuras auxeticas variando geometria	28-mar	4-abr																														
			4-abr	18-abr																												
Configuración y simulación de modelos auxeticos en Ansys APDL	25-abr	23-may																														
			23-may	13-jun																												
Simulación especial en Ansys APDL - Condicion de isotropia	20-jun	27-jun																														
Graficación, tabulación y analisis de resultados	4-jul	25-jul																														
Elaboracion informe proyecto de grado	18-ene	25-jul																														

Tabla 5. Cronograma de ejecución del proyecto.

9. Referencias

- [1] Teik-Chen Lim. Cap. 1: "Introducción". En: "Auxetic Materials and Structures". 1 ed. Springer Science+Business Media Singapore 2015.
- [2] Antonio Pérez González. Coeficiente de Poisson [En línea]. Mecapedia- Enciclopedia virtual de ingeniería mecánica. Área de Ingeniería mecánica. Universidad Juame I. Castellón. [Citado 28 Feb, 2016]. Disponible en: http://www.mecapedia.uji.es/coeficiente_de_Poisson.htm
- [3] Saint-Venant A.J.C.B. "Resumen de la experiencia en la aplicación de la mecánica a la creación de edificios y maquinaria", la primera edición, 1848 París.
- [4] Fung Y.C. "Foundations of solid mechanics". Prentice-Hall, 1965 New Jersey
- [5] Evans K. E. "Auxetic polymers: a new range of materials". Endeavour N° 15: Pág. 170–174. 1991.
- [6] Alderson A, Alderson K.L. "Auxetic materials". IMechE J Aerosp Eng N° 221: Pág. 565–575. 2007.
- [7] Gibson L.J, Ashby M.F, Schajer G.S, Roberson C.I. "The mechanics of two-dimensional cellular materials". Proc R Soc Lond A N° 382: Pág. 25–42. 1982.
- [8] Wojciechowski K.W, Branka A.C "Negative Poisson ratio in a two-dimensional "isotropic" solid". Phys Rev A 40: Pág. 7222–7225. 1989.
- [9] Yunan Prawoto. "Seeing Auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson ratio". Computational Materials Science. Junio 2012
- [10] Sergio L. Ribeiro, Thais A. Silva, Luciano M. Gomes V, "Geometrics Effects of Sustainable Auxetic Structures Integrating the Particle Swarm Optimization and Finite Element Method", Department of Mechanical Engineering, Federal University of São João del Rei – UFSJ, Materials Research. 2014; 17(3): 747-757
- [11] Oscar G. Castro .A. Gonzalo F. Casanova G. Yesid Aguilar C. "Estructuras hexaquirales con coeficiente de Poisson negativo bajo carga uniaxial en el plano". Universidad del Norte-Colombia. Ingeniería y Desarrollo. ISSN 0122-3461.Vol 30 N° 1 Enero-Junio 2012
- [12] D. Prall and R. S. Lakes, "Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio -1," J. of Mech. Sciences, vol. 39, pp. 305-314, 1996.
- [13] Osama A. M. Abdelaal and Saied M. H. Darwish. "Analysis, Fabrication And Biomedical Application of Auxetic Cellular Structures". IJEIT (International Journal Of Engineering and Innovative Technology), Vol. 2, Issue 3, 2012.
- [14] M. Sanami, N. Ravirala, K. Alderson, A. Alderson. "Auxetic Materials for Sports Applications". Procedia Engineering, 72(2014), Pág 453-458.

[15] R. C. Hibbeler. “Mecánica de Materiales”. Sexta edición. México. PEARSON EDUCACIÓN. 2006. ISBN: 970-26-0654-3.

[16] F. P. Beer. “Mecánica de Materiales”. Quinta edición. México. Mc Graw Hill EDUCACION. 2009. ISBN 13-978-607-15-0263-6.

[17] Teik-Chen Lim. Cap. 2:“Micromechanical Models for Auxetics Materials”. 1 ed. Springer Science+Business Media Singapore 2015.

[18] Oswaldo. Pastran. B. “Guía para el análisis y solución de problemas de resistencia de materiales”. Primera edición. Colombia. Editorial UD-Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2013. ISBN 978-958-8832-34-0.